

# Introducción a las distribuciones probabilísticas

## 1.1 Características generales de las distribuciones probabilísticas

*“Las preguntas más importantes sobre la vida son, en su mayor parte, en realidad solo problemas de probabilidad”. Pierre-Simon Laplace*

*El análisis de las probabilidades y, específicamente, de las distribuciones probabilísticas es lo que le imprime orden al estudio de la Estadística.*

Resulta conocido que el estudio de la teoría de las probabilidades consiste en un núcleo central que le brinda organización lógica al desarrollo de la estadística moderna. Las teorías probabilísticas son la base para la construcción de la estadística y, a su vez, la fuerza que la mantiene firmemente en pie. Es por ello que la estadística moderna es más que un grupo aleatorio de definiciones y conceptos, pues son estas teorías matemáticas las que originan esas definiciones y esos conceptos. En esta lectura se presentan las bases para entender uno de los conceptos probabilísticos de mayor importancia dentro de la estadística, que son las *distribuciones probabilísticas*. Para ello, primeramente, se tratan brevemente algunos fundamentos básicos de las probabilidades que serán importantes para la posterior comprensión de las distribuciones. Adicionalmente, se introduce un salto cualitativo en la comprensión de los conceptos de *media* y *varianza* que se estudian en la estadística descriptiva. Finalmente, se comienza el estudio de algunas distribuciones de variable discreta.

## 1.1.1 Fundamentos probabilísticos

### Probabilidades: definiciones importantes

La probabilidad de ocurrencia de un suceso es, en su noción más natural, un conocimiento realmente intuitivo para el humano y posiblemente exista desde mucho antes de que el razonamiento nos llevara a conceptualizar dicho conocimiento y permitiera construir una herramienta poderosa a partir de esta intuición natural. En su definición más simple, la probabilidad es una relación entre el número de **casos que favorecen** la ocurrencia de un suceso en particular y el número total de **casos posibles**. Por ejemplo, al lanzar un dado, existen en total *seis* casos posibles; si nuestro suceso de interés consiste en obtener un número en particular, solo existirá *un* caso favorable, y por lo tanto la probabilidad sería de  $1/6$ .

Esta definición, a pesar de ser en extremo útil en la cotidianidad, carece de un marco matemático poderoso que permita desarrollar conceptos más avanzados. Es por ello que existen otras definiciones formales de probabilidad que brindan un marco más sólido para la construcción de teoría. Una de estas definiciones es a través del *espacio de probabilidades*, para lo cual son necesarios otros dos conceptos previos, que son el *espacio de posibilidades* y la *ley de asignación de probabilidades*.

Se define el **espacio de posibilidades** (espacio de sucesos o espacio muestral) como un conjunto cuyos elementos representan sucesos posibles y, a su vez, todos los sucesos posibles están representados por algún elemento. Por ejemplo, si los sucesos de interés se definen por el valor *obtenido al lanzar un dado*, entonces el *espacio de posibilidades* sería el conjunto:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por otra parte, si se lanzaran dos dados, y los sucesos de interés consisten en la suma de ambos dados, entonces el espacio de posibilidades estaría definido por el conjunto:

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Es fácil advertir que en este último caso el valor de probabilidad asociado a cada suceso no es el mismo para todos (a diferencia del ejemplo anterior). Por ello, es necesario la existencia de una ley de asignación.

Se define la **ley de asignación de probabilidades** como una función (denotada comúnmente por  $P$ ) que determina un valor de probabilidad a cada uno de los elementos del espacio de posibilidades (denotado comúnmente por  $S$ ). Esta función asigna valores positivos y debe cumplirse que:

$$\sum_{a \in S} P(a) = 1$$

Se define, entonces, el **espacio de probabilidades** como el par  $(S, P)$  consistente en un espacio de posibilidades dotado de una función o ley de asignación de probabilidades.

Es posible notar que para el ejemplo del lanzamiento de un dado la ley de asignación de probabilidades es la constante  $1/6$  (asumiendo que se trate de un dado justo y no manipulado para que haya números favorecidos). Sin embargo, en el ejemplo de los dos dados, esta ley es relativamente más compleja y se puede comprobar que se define por:

|        |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a$    | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $P(a)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Otra definición que se utiliza comúnmente en el estudio de las probabilidades es la de *evento*. Un evento (E) es un subconjunto del espacio de posibilidades y su probabilidad de ocurrencia se corresponde con la suma de las probabilidades de los sucesos que forman dicho evento.

Por ejemplo, para el caso cuyos sucesos de interés consisten en el valor obtenido al lanzar un dado, es posible definir como un evento la obtención de un número par, lo cual consiste en un subconjunto de tres sucesos del espacio de posibilidades (obtener un 2, un 4 o un 6). Se puede observar sin dificultad que la probabilidad de ocurrencia de dicho evento es de  $1/2$ .

### Las leyes básicas de las probabilidades

A base de los conceptos planteados arriba, es posible enunciar algunas leyes o reglas básicas que son útiles para el trabajo con probabilidades: la *regla de la negación*, la *regla multiplicativa* y la *regla aditiva*.

La **regla de la negación** plantea que si la probabilidad de que ocurra un suceso  $A$  es  $p$ , entonces la probabilidad de que **no** ocurra el suceso  $A$  sería  $1-p$ . Para la definición de eventos, esta regla propone que la probabilidad de que **no** ocurra un evento es equivalente a la probabilidad de que ocurra el *evento complementario*, que está formado por todos los sucesos del espacio de posibilidades que no forman parte del evento de interés.

La **regla multiplicativa** establece que para dos sucesos  $A$  y  $B$  que sean independientes entre sí (lo cual significa que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro) la probabilidad de que ocurran  $A$  y  $B$  es equivalente a la multiplicación de las probabilidades de  $A$  y de  $B$  por separado. Es decir:

$$prob("A \text{ y } B") = prob(A) \times prob(B)$$

Por otra parte, la **regla aditiva** plantea que, si un suceso  $A$  puede ocurrir de varias formas, entonces la probabilidad de  $A$  es equivalente a la suma de las probabilidades de todas las formas de que ocurra este suceso. Dicho de otro modo, si un suceso (o evento) está determinado por la ocurrencia de las vías  $A \circ B$ , entonces la probabilidad de que ocurra dicho suceso es equivalente a la suma de las probabilidades de  $A$  y de  $B$  por separado. Es decir:

$$\text{prob}("A \circ B") = \text{prob}(A) + \text{prob}(B)$$

Utilizando la teoría de conjuntos es fácil extrapolar formalmente la idea de las reglas multiplicativa y aditiva al concepto de eventos. De esta forma, es posible comprender por qué debe cumplirse que la suma de la probabilidad de todos los sucesos posibles es 1 al aplicar la regla aditiva sobre el evento compuesto por todos los sucesos posibles, que sería el evento trivial "que ocurra algo", cuya probabilidad es, evidentemente, absoluta.

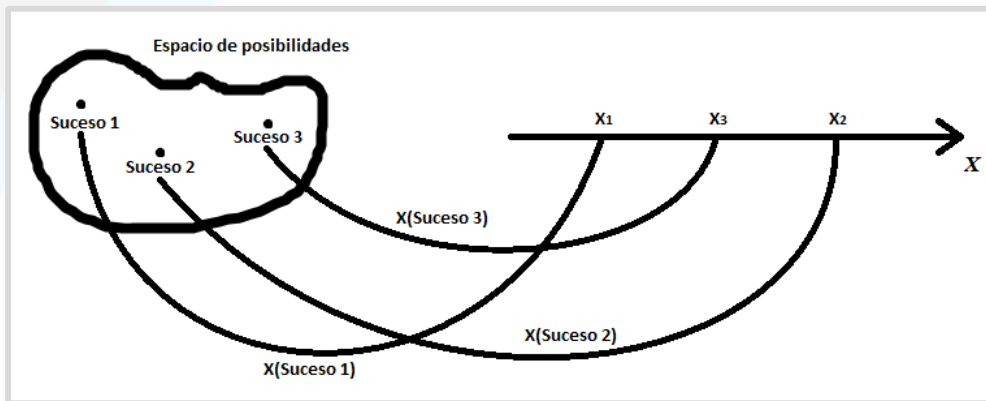
## 1.1.2 Variables aleatorias

Un concepto que es altamente tratado dentro de la estadística y que a su vez resulta de vital importancia para la comprensión de las distribuciones probabilísticas es el de *variable aleatoria*. Dentro del marco de estudio de las probabilidades definido anteriormente, una **variable aleatoria** no es más que una *función* (comúnmente denotada como  $X, Y, Z...$ ) definida sobre un espacio de probabilidades  $(S, P)$  y que toma valores dentro de algún conjunto numérico (normalmente, el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  o los números reales  $\mathbb{R}$ ). Es decir:

$$X: S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{R}$$

En otras palabras, una variable aleatoria no es más que una función que asigna a cada suceso dentro de un espacio de posibilidades un valor dentro de la recta numérica, lo cual puede representarse en el siguiente esquema:

**Figura 1: Definición de variable aleatoria a partir de un espacio de posibilidades**



Fuente: elaboración propia.

Para el lanzamiento de un dado, el espacio de posibilidades está determinado por el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , y es posible definir innumerables variables aleatorias sobre este espacio de posibilidades. Por ejemplo, una variable  $X$  que representa precisamente el valor del número obtenido, es decir:

$$X(s) = s, \quad \text{con } s \in S$$

Otro ejemplo podría ser el número de letras que tiene la palabra en español, que representa el número obtenido:

$$Y(s) = \# \text{letras de la palabra } s, \quad \text{con } s \in S$$

Teniéndose  $Y(1) = Y(2) = 3$ ,  $Y(3) = Y(6) = 4$ ,  $Y(4) = 6$ ,  $Y(5) = 5$ .

Un concepto de mayor abstracción que se encuentra naturalmente conectado con la definición de variable aleatoria mostrada arriba es el de *distribución probabilística*.

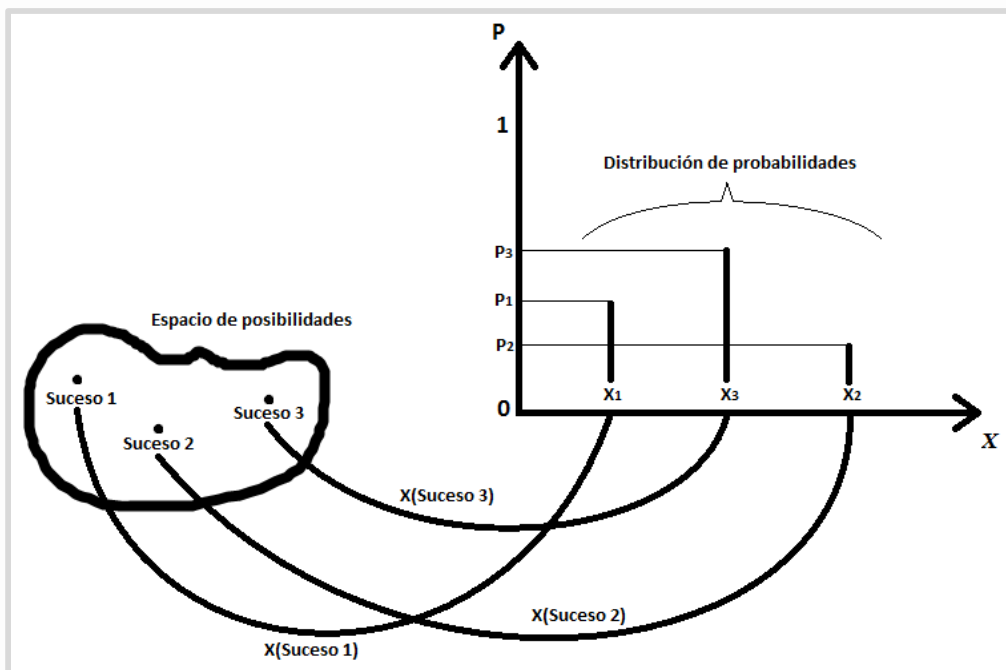
Como ya se mencionó, una variable aleatoria asigna un valor numérico a cada suceso del espacio de posibilidades, pero este valor podría coincidir para más de un suceso. Supongamos que una variable aleatoria  $X: S \rightarrow \mathbb{R}$  toma valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ ; es posible definir el inverso de esta variable aleatoria  $X^{-1}(x_i) \subseteq S$ , el cual representa el subconjunto del espacio de posibilidades cuyos sucesos brindan el valor  $x_i$  a la variable aleatoria  $X$ ; en

otras palabras,  $X^{-1}(x_i)$  sería un evento dentro del espacio de posibilidades. Para cada uno de estos eventos existirá una *probabilidad asociada*, dada por la ley de asignación de probabilidades, por lo que es posible definir:

$$p_i = P(X^{-1}(x_i))$$

Por lo tanto, para cada valor  $x_i$  de la variable aleatoria  $X$  existirá un valor de probabilidad  $p_i$  asociado. De esta forma se define una **distribución de probabilidades** para la variable aleatoria  $X$  como la relación entre los valores  $p_i$  y  $x_i$ . Es posible ilustrar esta definición sobre el esquema anterior:

**Figura 2: Definición de distribución de probabilidades a partir de un espacio de posibilidades**



Fuente: elaboración propia.

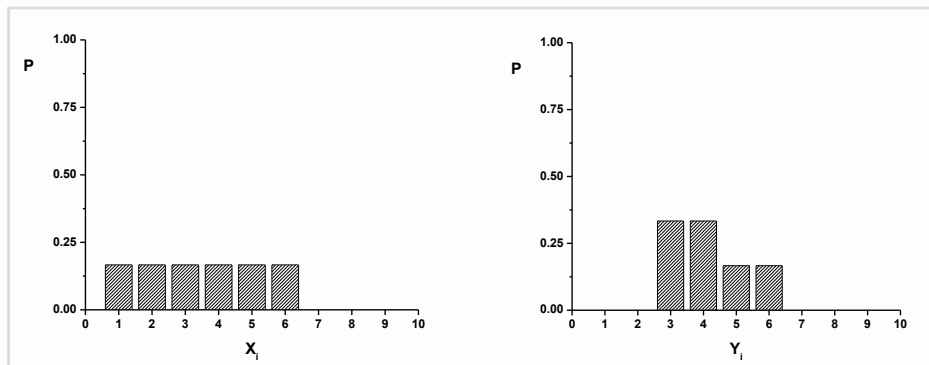
De esta forma, una distribución probabilística responde dos preguntas principales acerca de una variable aleatoria: ¿qué valores toma la variable? y ¿cuál es la probabilidad de que la variable tome un valor determinado?

Mediante estas definiciones, es posible mostrar las distribuciones probabilísticas de los ejemplos anteriores. Para el caso de la variable  $X$  (valor numérico obtenido al lanzar un dado), se tiene  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6$  con las probabilidades  $p_i = \frac{1}{6}$ . Por otra parte, en el caso de la

variable  $Y$  (número de letras) se tiene  $y_1 = 3, y_2 = 4, y_3 = 5, y_4 = 6$ , con las probabilidades  $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{6}$ .

La Figura 3 muestra ambas distribuciones probabilísticas.

**Figura 3: Ejemplos de distribuciones probabilísticas para las variables aleatorias  $X$  (izquierda) e  $Y$  (derecha)**



Fuente: elaboración propia.

### 1.1.3 Media y varianza: un punto de vista probabilístico

Para toda variable aleatoria dentro de un espacio de probabilidades existen tres números de gran importancia, que a su vez caracterizan la distribución probabilística asociada a dicha variable aleatoria: la media, la varianza y la desviación estándar. Estos parámetros son conocidos y muy utilizados dentro del estudio de la estadística descriptiva; sin embargo, el fundamento de sus definiciones es de mayor profundidad y abstracción, y surge del contexto de las distribuciones probabilísticas.

Para una variable aleatoria  $X$  dada, se define la **media**, o **valor esperado** (denotada como  $\mu$  o  $E(X)$ ), como la suma de todos los valores posibles de la variable  $X$  multiplicados por la probabilidad asociada a cada valor. Es decir:

$$E(X) = \mu = \sum_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Donde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  son los valores de la variable aleatoria y  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , las probabilidades asociadas.

Para los ejemplos mostrados anteriormente, es fácil mostrar que:

$$E(X) = \mu_X = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$E(Y) = \mu_Y = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{6} \approx 4,2$$

Una forma de entender el significado del valor esperado es, como su nombre lo indica, el valor que se espera que tome como promedio la variable aleatoria si el evento de selección se realizara muchas veces. En otras palabras, puede entenderse como el “costo” de obtener un valor para la variable aleatoria. Por ejemplo, si el primer caso mostrado arriba (variable aleatoria  $X$ ) consiste en algún tipo de juego en el que el jugador lanza un dado y recibe el equivalente en dólares del número obtenido, a veces ganará 5 o 6 dólares, y otras veces solo 1 dólar; pero lo que se espera es que por cada tirada el jugador gane 3,5 dólares, por lo tanto ese sería el costo justo para jugar este juego. Si el precio por jugar fuera de 4 dólares por cada tirada, entonces lo esperado es que si se jugara muchas veces el jugador pierda 50 centavos de dólar cada vez que lanza el dado.

Un ejemplo de aplicación del valor esperado, y que resulta de interés en la vida cotidiana, consiste en la determinación del valor de un boleto de lotería. Supongamos que una determinada lotería vende 10 millones de boletos por el precio de un peso cada uno y otorga varios premios: un gran premio (G) de 1 millón de pesos, 10 segundos premios (S) de 100.000 pesos, 1.000 terceros premios (T) de 1.000 pesos y 1 millón de premios de consolación (C), que reciben de regreso el peso de la compra del boleto; y el resto (N) no recibe nada. En este caso, el espacio de posibilidades estaría dado por:

$$S = \{G, S, T, C, N\}$$

Sobre el cual se puede definir la variable aleatoria  $X(s) = s$ , equivalente al dinero obtenido. Esta variable toma los valores:

$$x_1 = 10^6, x_2 = 10^5, x_3 = 10^3, x_4 = 1, x_5 = 0$$

Con las probabilidades:

$$p_1 = \frac{1}{10^7}, p_2 = \frac{1}{10^6}, p_3 = \frac{1}{10^4}, p_4 = \frac{1}{10}, p_5 = \frac{10^7 - 10^6 - 10^3 - 10 - 1}{10^7} \approx \frac{9}{10}$$

Por tanto, el valor esperado sería:

$$E(X) = 10^6 \times \frac{1}{10^7} + 10^5 \times \frac{1}{10^6} + 10^3 \times \frac{1}{10^4} + 1 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{9}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Entonces, el precio real de cada boleto de esta lotería de ejemplo es de 40 centavos, lo que significa que por cada venta el dueño *espera* ganar 60 centavos. Lo interesante surge cuando en algunos casos el valor esperado de esta lotería aumenta, por ejemplo, cuando pasa un determinado tiempo sin que nadie gane y los premios se van acumulando. Este tipo de cálculo permite determinar entonces si el valor esperado ha subido por encima del precio del boleto, lo cual favorece al jugador.

Por otra parte, la **varianza** (denotada como  $\sigma^2$  o  $Var(X)$ ) es una medida de la dispersión que tienen los valores de la variable aleatoria alrededor del valor esperado y se define como:

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

Existe un teorema en la teoría de las probabilidades que brinda una fórmula para la varianza ligeramente diferente, pero que resulta de mayor utilidad para su uso:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2$$

Adicionalmente, la **desviación estándar** (denotada como  $\sigma$  o  $SD(X)$ ) se define como la raíz cuadrada de la varianza ( $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ ). La desviación estándar es igualmente una medida de la dispersión en torno al valor esperado y su definición existe con el objetivo de igualar sus unidades con respecto al valor esperado (la varianza tiene las unidades del valor esperado al cuadrado). Es por ello que son la media y la varianza los dos parámetros que realmente caracterizan una variable aleatoria, específicamente la distribución probabilística asociada a dicha variable aleatoria.

## 1.1.4 Función generatriz

Los conceptos de media y de varianza tienen un papel central dentro de la caracterización de las distribuciones probabilísticas; no obstante, estas pueden ser muy variadas y no siempre resulta sencillo determinar estos parámetros para casos generalizadores. Sin embargo, utilizando algunos conceptos de cálculo existe una vía para determinar la media y la varianza de cualquier distribución probabilística. Para ello es necesario utilizar la denominada *función generadora* o *generatriz de probabilidades*.

Una **función generadora de probabilidades**  $g(t)$  es una función que encapsula matemáticamente todas las probabilidades de una distribución.

Para una variable aleatoria  $X$  con valores  $x_0, x_1, x_2, \dots$  y con probabilidades  $p_0, p_1, p_2, \dots$  se define su función generatriz como:

$$g(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3 + \dots$$

Es muy importante notar que para cualquier función generadora de probabilidades se cumple que  $g(1) = 1$ , puesto que para  $t = 1$  la función equivale a la suma de todas las probabilidades posibles.

Para el uso de la función generatriz existe un teorema (cuya demostración supera el objetivo de este curso) que relaciona la media y la varianza con las derivadas de esta función generadora (o *polinomio generador*) de la forma:

$$\mu = g'(1)$$

$$\sigma^2 = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$$

Donde  $g'(1)$  y  $g''(1)$  representan la primera y la segunda derivada de la función generatriz evaluadas en  $t = 1$ , respectivamente.

# 1.2 Distribuciones de variable discreta

A pesar de que el concepto de distribución probabilística es altamente general y de que la forma de la distribución puede diferir considerablemente entre distintos fenómenos, existen distribuciones probabilísticas descritas que son aplicables a la inmensa mayoría de los sucesos cotidianos. En esta unidad se presentan algunas de las distribuciones más comunes para variables aleatorias discretas, es decir, aquellas que no toman valores continuos.

## 1.2.1 Distribución binomial

Supongamos que lanzamos una moneda al aire  $n$  veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener *cara* exactamente  $k$  veces ( $k < n$ )?

Para ello es necesario contar el número casos favorables y de casos totales. El número de casos totales es la cantidad de secuencias posibles consistentes en  $n$  elementos, donde cada elemento puede tener dos valores (*cara* o *cruz*), lo cual es  $2^n$ . Por otra parte, el número de casos favorables consiste en la cantidad de secuencias de  $n$  elementos donde un número  $k$  de ellos contiene un valor específico (*cara*), esto equivale a la combinación de  $n$  elementos seleccionados de  $k$  en  $k$ , que es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por lo tanto, la probabilidad deseada ( $p_k$ ) es:

$$p_k = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Esta probabilidad define una distribución probabilística, conocida como *distribución binomial*, sobre una variable aleatoria  $X$ , que toma valores  $0, 1, 2, \dots, n$  y con probabilidades  $p_k = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Esta distribución es comúnmente denotada como  $B(n, \frac{1}{2})$ , donde  $\frac{1}{2}$  representa la probabilidad de obtención de un único caso favorable.

En un caso más general, supongamos que la moneda que lanzamos no es completamente justa, es decir, la probabilidad de que salga *cara* o *cruz* no es la misma (lo cual es equivalente a cualquier situación en la que existen para un fenómeno dos resultados posibles que no son igualmente probables).

Siendo  $p$  la probabilidad de que salga cara en un lanzamiento y  $q$  la probabilidad de que salga cruz (notar que por la regla de la negación  $q = 1 - p$ ), se tiene entonces que:

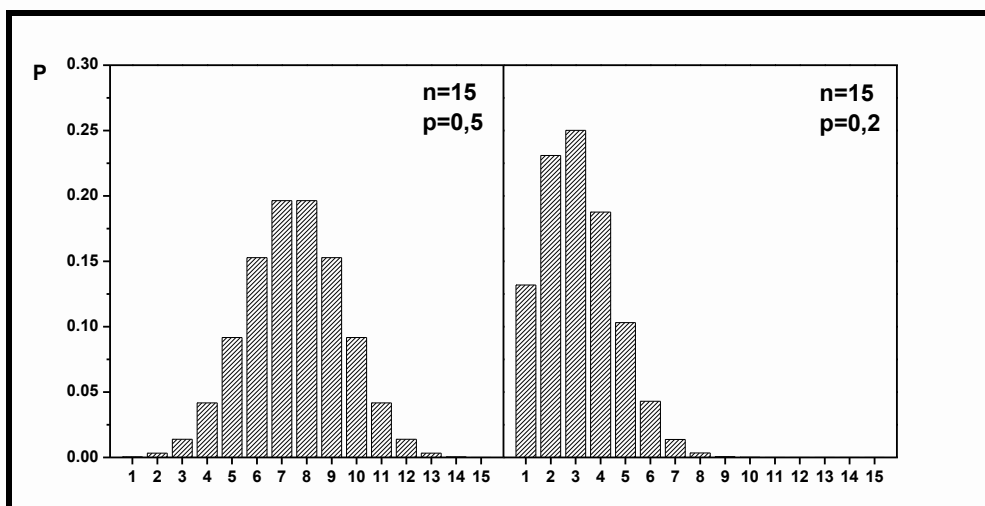
$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Esto es debido a que la probabilidad de que ocurran  $k$  casos favorables sería  $p$  multiplicada  $k$  veces (por la regla multiplicativa), mientras que la probabilidad de que el resto de los casos totales ( $n - k$ ) sean no favorables sería de  $q$  multiplicada  $n - k$  veces. Es posible notar que si  $p = q = \frac{1}{2}$ , la ecuación se reduce al caso planteado arriba.

De esta forma, se define la distribución binomial  $B(n, p)$  sobre una variable aleatoria  $X$ , que toma valores  $0, 1, 2, \dots, n$  y con probabilidades  $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

En la Figura 4, se muestran dos ejemplos de esta distribución probabilística para  $n = 15$  con  $p = \frac{1}{2}$  y  $p = \frac{1}{5}$ .

**Figura 4: Ejemplos de distribución binomial para  $n=15$  con distintos valores de  $p$**



Fuente: elaboración propia.

Para la distribución binomial  $B(n, p)$ , la función generatriz definida anteriormente tiene la forma:

$$g(t) = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1}t + \binom{n}{2} p^2q^{n-2}t^2 + \dots + \binom{n}{n} p^n t^n$$

En la cual es posible notar que se corresponde con la expansión de un binomio (siendo este el origen del nombre) de la forma:

$$g(t) = (pt + q)^n$$

Aplicando los teoremas planteados para la media y la varianza, se tiene:

$$\mu = np(pt + q)^{n-1}$$

$$\sigma^2 = p^2(n^2 - n)(pt + q)^{n-2} + np(pt + q)^{n-1} - n^2p^2(pt + q)^{2n-2}$$

Sustituyendo  $t = 1$  en estas expresiones y teniendo en cuenta que  $p + q = 1$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ \sigma^2 &= np(1 - p) = npq\end{aligned}$$

## 1.2.2 Distribución geométrica

Una distribución probabilística cercana a la distribución binomial es la *distribución geométrica*. Supongamos que se lanza la misma moneda anterior y se desea saber la probabilidad de que salga *cara* por primera vez en el lanzamiento  $k$ . Siendo  $p$  la probabilidad de obtener *cara* en un lanzamiento, se tiene entonces que la probabilidad de obtener *cara* en el lanzamiento  $k$ , habiéndose obtenido *cruz* en todos los anteriores, sería:

$$p_k = q^{k-1}p$$

Esta probabilidad define una distribución geométrica sobre una variable aleatoria  $X$ , que toma valores  $1, 2, 3 \dots$  y con probabilidades  $p_k = q^{k-1}p$ , con  $k = 1, 2, 3, \dots$

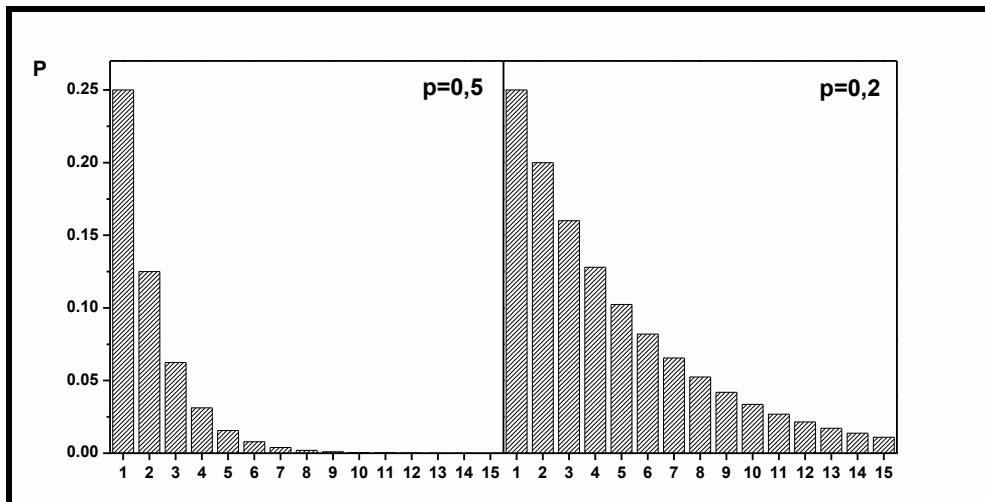
Utilizando la función generatriz y el mismo razonamiento planteado para la Distribución Binomial, es posible demostrar que:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

La Figura 5 muestra dos ejemplos de la distribución geométrica para  $p = \frac{1}{2}$  y  $p = \frac{1}{5}$ .

**Figura 5: Ejemplos de distribución geométrica para distintos valores de p**



## 1.2.3 Distribución de Poisson

Dentro de las distribuciones probabilísticas discretas, una de las más utilizadas es la *distribución de Poisson*, nombrada por el matemático francés Simeon D. Poisson. Esta distribución es utilizada en procesos donde los sucesos discretos ocurren sobre un continuo, como el espacio o el tiempo, sin ocupar una parte importante de dicho continuo (son sucesos puntuales), y a su vez presentan probabilidad de ocurrencia constante a través del continuo. Por ejemplo, la llegada de pacientes a una fila de espera, el desgaste de una pieza en una máquina de producción, el número de accidentes en un punto de la autopista, entre otros muchos ejemplos.

La distribución de Poisson, se obtiene a partir del caso extremo de la distribución binomial para valores muy elevados de  $n$  y valores bajos de  $p$ . En otras palabras, es el límite de la distribución binomial cuando  $n$  tiende a infinito y  $p$  tiende a cero, y se define como:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

El uso de esta distribución está especializado en la ocurrencia de sucesos con probabilidades muy pequeñas, por lo que a veces se le denomina “ley de los sucesos raros”.

## 1.2.4 Aplicación de las distribuciones de variable discreta

La descripción de gran parte de los fenómenos de la vida cotidiana se realiza mediante variables discretas, e incluso en casos de mayor complejidad a veces resulta válido aproximar el fenómeno a un modelo de variables discretas. Esto dependerá de la pregunta concreta que queramos responder. Por ejemplo, si el fenómeno de análisis es descrito mediante una variable que puede tomar valores en un intervalo continuo, pero la problemática que se desea resolver está relacionada con el estudio de las probabilidades de que dicha variable sea mayor o menor que un determinado valor, entonces el análisis puede simplificarse a una variable discreta que represente los valores “mayor” o “menor”. En casos como este, es válido aplicar las distribuciones discutidas en esta lectura.

Supongamos que un vendedor de un producto determinado ya cuenta con alguna experiencia y normalmente logra venderle al 60 % de sus clientes potenciales. Este vendedor decide pasar algunos cursos de estadística y de estudio de mercado, y a partir de entonces ha tenido 26 clientes potenciales de los cuales 20 le han comprado su producto. ¿Ha mejorado su habilidad de venta a partir de pasar los cursos, o bien el aumento de venta se debe al azar?

Para respondernos esta pregunta, es posible utilizar la distribución binomial, pues el suceso en estudio tiene dos casos posibles (*venta* o *no venta*), similar al lanzamiento de una moneda. La probabilidad de *venta* ( $p$ ) es de 0,6, mientras que la de *no venta* ( $q$ ) es de 0,4; por lo tanto, la probabilidad de venderles a 20 clientes o más de un total de 26 bajo estas condiciones sería:

$$P = p_{20} + p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} + p_{25} + p_{26} = \sum_{k=20}^{26} \binom{26}{k} 0,6^k 0,4^{26-k}$$

$$P \approx 0,05588 \approx 5,6 \%$$

Este resultado significa que venderles el producto a 20 clientes o más de un total de 26 sin haber mejorado, es decir, debido al azar, es menor al 6 %, lo cual es un valor pequeño. Por tanto, es posible que su habilidad de venta haya aumentado y realmente  $p > 0,6$  a partir de haber pasado los cursos.

Veamos otro ejemplo de aplicación de las distribuciones discretas: en una determinada fábrica hay un cortador de madera que se rompe,

en promedio, tres veces al mes; y el dueño de la fábrica desea conocer cuál es la probabilidad de que la máquina no se rompa más de una vez el próximo mes.

En este caso, es posible utilizar la distribución de Poisson, debido a que el suceso de ruptura del cortador de madera ocurre en un determinado instante de tiempo, es decir, es un suceso puntual en un continuo. Adicionalmente, la probabilidad ( $p$ ) de ocurrencia es baja, teniendo en cuenta que se rompe tres veces en un período de tiempo largo, ya que a cada instante puede romperse, y el número de instantes ( $n$ ) es grande en un mes. De este análisis es posible deducir que  $\lambda = np = 3$ . Por lo tanto, siendo  $k$  el número de veces que se rompería la máquina el próximo mes, se tiene:

$$p_{k \leq 1} = \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} \approx 0.199 \approx 20 \%$$

Esto significa, entonces, que existe aproximadamente un 80 % de probabilidad de que el cortador de madera se rompa más de una vez durante el próximo mes.

La utilidad que presentan las distribuciones discretas es infalible, no obstante, existen otros fenómenos en la naturaleza que carecen del carácter discreto. Es, por tanto, necesario que las nociones teóricas mostradas en esta lectura sean extendidas a variables continuas.

## Referencias

**Ambroggio, E. E., y Pérez Socas, L. B.** (2016). *Certificado Estadística XXI: Estadística para la toma de decisiones* (curso 1, módulo 3, lectura 3). Córdoba: Universidad Empresarial Siglo 21.

**Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A.** (2011). *Statistics for Business and Economics* (11ª ed). Mason, OH: Cengage Learning.

**Bertsekas, D. P., & Tsitsiklis, J. N.** (1997). *Introduction to Probability* (2ª ed). USA: Wiley.

**Levine, D. M., Krehbiel, T. C., y Berenson, M. L.** (2014). *Estadística para administración*. México: Pearson Educación.

**Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M.** (2013). *Introduction to Probability and Statistics*. Boston, MA, USA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

**Rumsey, D. J.** (2006). *Probability for Dummies*. USA: Wiley.