

3.1 Conceptos básicos de las probabilidades

“Es una verdad muy cierta que, cuando no esté a nuestro alcance determinar lo que es verdad, deberemos seguir lo que es más probable.” René Descartes

El paso de la estadística descriptiva a la estadística inferencial atraviesa inevitablemente el camino de las probabilidades. Es, por tanto, imprescindible estudiar probabilidades para comprender la estadística.

3.1.1 Importancia de las probabilidades

En la vida cotidiana las personas suelen hacerse preguntas que aparentan no estar relacionadas en absoluto, tales como: “¿Lloverá mañana? ¿Me sacaré la lotería algún día? ¿Comparto fecha de nacimiento con alguien de mi grupo?”. No obstante, la realidad es que este tipo de preguntas están más relacionadas de lo que una primera impresión podría indicar. Eso se debe a que todas tienen en común un mismo marco teórico de análisis, que es la teoría de las probabilidades.

El uso de las probabilidades en el mundo moderno ha alcanzado un nivel muy elevado de importancia para la sociedad y la humanidad en general. Lo ha hecho no solo por su utilidad para responder preguntas puntuales, sino también por su influencia en la toma de decisiones relevantes. Es por ello que el objetivo de esta lectura consiste en presentar desde la base los conceptos más importantes para el estudio de las probabilidades. Para ello se comenzará con una exposición acerca de los distintos métodos para contar cosas, seguido de definiciones y reglas importantes en las probabilidades, todo ello matizado con ejemplos concretos que podrían resultar curiosos e incluso interesantes.

3.1.2 ¿Qué es contar?

Uno de los primeros aprendizajes de la vida es el de contar, y se vuelve algo tan común que a veces resulta hasta intuitivo y sencillo. Pero no siempre es así. Preguntas como “¿cuántas manzanas hay en la bolsa?” podrían tener repuestas casi instantáneas; pero otras como “¿cuántas palabras de cinco letras comienzan con la letra *a*?” podrían resultar un poco más difíciles de contestar. La posibilidad de contar este tipo de cosas es la base fundamental para el estudio de las probabilidades.

Supongamos que nuestro interés es saber cuántas palabras de tres letras se pueden formar con un alfabeto que este conformado solamente por las letras *a* y *b* (por *palabra* entendemos cualquier combinación de letras, tenga o no significado real).

Una buena aproximación para resolver este problema consistiría en escribir de forma explícita todas las variantes posibles y luego contarlas en el sentido usual y cotidiano, o sea, para el ejemplo sería: *aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb*. Todo eso suma 8 palabras.

Otra forma de llegar a la respuesta podría ser el siguiente análisis: para la primera posición en la palabra existen dos opciones (a o b), y por cada una de estas existen otras dos opciones para la segunda posición, y para cada una de todas estas opciones existen otras dos opciones en la tercera posición, haciendo un total de $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ opciones totales.

¿Qué pasaría si se incluyera la letra c en el alfabeto? ¿Cuántas palabras se formarían? En este caso existirían tres opciones para la primera posición, y por cada una de ellas habría tres opciones para la segunda posición, y para cada una de todas ellas existirían otras tres opciones para la tercera posición, siendo entonces $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ palabras totales.

De esta forma es posible generalizar este análisis para un caso de palabras de k letras con un alfabeto de n letras, siendo el número de palabras n^k .

Es posible añadir algunas condiciones a este ejemplo y encontrar otros resultados igual de interesantes. Por ejemplo, está el caso en que la cantidad de letras que conforman la palabra y la cantidad de letras que tiene el alfabeto coinciden, digamos n , y nos hacemos la pregunta: ¿cuántas palabras que no presentan letras repetidas se pueden formar?

En este caso existirían n opciones para la primera posición, $n - 1$ opciones para la segunda, $n - 2$ opciones para la tercera, y así sucesivamente hasta completar las n posiciones. Entonces:

$$\#PALABRAS = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Este tipo de expresión se conoce como *factorial del número n* (se representa como $n!$), que se entiende como el número de **permutaciones de n elementos**, siendo:

$$0! = 1 \text{ (por definición)}$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

...

La pregunta planteada anteriormente podría generalizarse en caso de que el número k de letras que conforman la palabra no coincida la cantidad n de letras que tiene el alfabeto (con la restricción de $n \geq k$, necesaria para no encontrar letras repetidas). En este caso igualmente existirían n opciones para la primera posición, $n - 1$ opciones para la segunda, $n - 2$ opciones para la tercera, y así sucesivamente hasta completar las k posiciones, lo cual presentaría $n - k + 1$ opciones. Por tanto:

$$\#PALABRAS = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Este valor representa el número de variantes posibles que existe de seleccionar k elementos de un total de n elementos, en donde el orden de selección de los k elementos importa, y es conocido como variación de n elementos seleccionados de k en k ".

Adicionalmente, podría resultar el caso en que el orden de selección de los elementos no importe. Por ejemplo, si tuviésemos que planificar un determinado evento que ocurre en tres días de la semana y quisiéramos saber de cuántas formas diferentes podríamos organizar el calendario. En este caso no habría diferencia entre si el evento se planifica para el lunes, el martes o el jueves, o bien si se planifica para el lunes, el jueves y el martes. Es por ello que se dice que el orden no importa. En otras palabras, esto significa que aquellas opciones que sean una permutación entre sí solo se contarán una vez. Por este motivo no es difícil notar que el número de posibilidades se corresponde con la cantidad de variantes posibles (igual que en el ejemplo anterior) dividido por el número de permutaciones posibles de la cantidad de elementos seleccionados. Para el caso general de seleccionar k elementos de un total de n elementos se tiene:

$$\#FORMAS = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este valor se conoce como combinación de n elementos seleccionados de k en k , y es comúnmente expresado de la forma:

$$\binom{n}{k}$$

Estas diferentes formas de contar pueden ser llevadas a muchos casos de la vida cotidiana y presentan una alta importancia dentro del campo de las probabilidades, ya que, como veremos posteriormente, estas no son más que una relación entre dos cuentas. Las permutaciones, variaciones y combinaciones, si bien son algo muy utilizado, no son en absoluto las únicas formas de contar. La siguiente tabla resume estos casos, así como algunas de sus variaciones.

Tabla 1: Resumen de diferentes formas de contar

Nombre	Ecuación	Importa el orden	Se repiten elementos	Denominación
Permutaciones ordinarias	$n!$	Sí	No	Permutaciones de n elementos.
Variaciones	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Sí	No	Variaciones ordinarias de n elementos tomados de k en k .
Variaciones con repetición	n^k	Sí	Sí	Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k .
Combinaciones	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	No	No	Combinaciones de n elementos tomados de k en k .
Combinaciones con repetición	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	No	Sí	Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k .

Fuente: elaboración propia.

3.1.3 Nociones básicas de probabilidades

Es difícil de determinar en qué punto de la historia el ser humano comenzó a pensar en conceptos como el de probabilidades o el de azar.

Los juegos con dados (incluso algunos cuyas reglas hoy no se conocen) se practicaron ininterrumpidamente desde los tiempos del Imperio Romano hasta el Renacimiento. Uno de estos juegos era denominado *hazard* (que significa *riesgo* o *peligro* en inglés y francés). Fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada y su nombre proviene de la palabra árabe *al-azar*, que significa *dado*. (Vega-Amaya, 2002).

Supongamos que estamos interesados en un determinado suceso A que tiene un número N de vías para ocurrir (**casos favorables**) de un total de posibilidades T (**casos posibles**). Se define la probabilidad de que ocurra A como:

$$prob(A) \equiv \frac{N}{T} = \frac{\#CASOS FAVORABLES}{\#CASOS POSIBLES}$$

Por definición, siempre el número de casos favorables va a ser menor o igual que el número de casos posibles. Por lo tanto: $0 \leq \text{prob}(A) \leq 1$.

Teniendo en cuenta esta definición, y haciendo uso de las técnicas de conteo expuestas anteriormente, es posible dar respuesta a muchos interrogantes. Por ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de obtener un 2 si lanzamos un dado? En este caso A sería el suceso de *obtener un 2*. Como un dado típico tiene 6 caras (y, por lo tanto, 6 casos posibles) y solo estaríamos interesados en uno de esos casos, se tiene:

$$\text{prob}(A) = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

Otro ejemplo podría ser: si se tiene un grupo de 32 personas, de las cuales 4 tienen el pelo rubio, ¿cuál es la probabilidad de escoger una persona al azar que tenga el pelo rubio? Ahora A sería el suceso *escoger una persona de pelo rubio*, y tendríamos 32 casos posibles, de los cuales 4 consisten en casos favorables, es decir:

$$\text{prob}(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Un ejemplo un poco más sofisticado, pero igual de ilustrativo, podría ser la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de lanzar una moneda al aire 3 veces y obtener 3 caras consecutivas? En este caso, ¿cuál sería el número de casos posibles? Aplicando las reglas de conteo discutidas arriba, podríamos determinar que son 8 casos posibles, pues cada lanzamiento presenta 2 posibilidades y se realizan 3 lanzamientos, por lo que hay $2^3 = 8$ posibilidades. De estas 8 posibilidades solo estamos interesados en la única que representa tres caras, por tanto:

$$\text{prob}(A) = \frac{1}{8} = 0.125$$

3.1.4 Exposición informal de una definición formal

Existen muchas definiciones de lo que son las probabilidades. Todas son igualmente de válidas y representativas de la idea expuesta arriba. Sus diferencias radican en el nivel de formalismo utilizado. Para exponer (de forma informal) una de estas definiciones formales primero son necesarias otras definiciones previas.

Se define un *espacio de posibilidades* como un conjunto formado por elementos genéricos (números, funciones, personas, etc.), donde cada uno de ellos representa un suceso posible, y todos los sucesos posibles están representados por un elemento.

Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado existen seis posibles sucesos, correspondientes a los seis números posibles. Por lo tanto el espacio de posibilidades en este caso vendría dado por:

$$S1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si se lanzan dos dados, y los sucesos de nuestro interés consisten en todas y cada una de las posibilidades de lanzamiento, el espacio de posibilidades estaría conformado por todas las combinaciones de números que son posibles obtener, lo cual podría representarse por el conjunto:

$$S2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Sin embargo, si el suceso de nuestro interés consiste solamente en la suma de los dos dados entonces el espacio de posibilidades podría representarse como:

$$S3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Entonces, se puede definir el *espacio de probabilidades* como el conjunto dado por el espacio de posibilidades (S) dotado de una ley o función (P) que determina un valor de probabilidad en cada uno de los elementos del espacio de posibilidades, y se denota por el par: E, P . Se denomina entonces *probabilidad del suceso A* o $prob(A)$ al valor que asigna la ley P al elemento A perteneciente al conjunto S . Para que esta definición sea correcta, el valor que asigna la ley P a cada elemento de S debe ser positivo y debe cumplirse que:

$$\sum_{a \in S} P(a) = 1$$

Esto significa que la suma de las probabilidades de todos los sucesos posibles debe ser igual a la unidad. Esta definición permite englobar en un mismo marco teórico el caso en que todos los sucesos no sean igualmente probables. Por ejemplo, para el caso de $S1$ y $S2$ expuestos arriba resulta evidente que todos los sucesos presentan la misma probabilidad, siendo $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{36}$ respectivamente. Es posible comprobar que, para el caso de $S1$ (y similarmente para $S2$), la ley de asignación de probabilidades P sería:

$$P(s) = \frac{1}{6}, \text{ para todo } s \in S1$$

$$\sum_{a \in S1} P(a) = \sum_{a \in S1} \frac{1}{6} = 1$$

Sin embargo, el caso de $S3$ es diferente, pues no todos los casos presentan la misma probabilidad. Por ejemplo, para obtener un 2 como suma de ambos dados solo existe una posibilidad, que sería: (1,1); mientras que un 3 podría obtenerse de dos maneras: (1,2) o (2,1). Puesto que son 36 casos totales, la probabilidad de que los dados sumen 2 sería de $\frac{1}{36}$, y de que sumen 3 sería de $\frac{2}{36}$, siendo valores diferentes. Es fácil de comprobar (para el análisis es

posible apoyarse en el conjunto S_2) que la ley de asignación de probabilidades P estaría dada por:

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Otra definición que resulta muy importante para las probabilidades es la definición de *evento*. Se define un *evento* (E) como un subconjunto del espacio de posibilidades. En este caso se define la probabilidad del evento E como la suma de las probabilidades de todos los elementos que pertenecen a E . O sea:

$$P(E) = \sum_{e \in E} P(e)$$

Un ejemplo para ilustrar esto podría estar dado por la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número par? El hecho de obtener un número par al lanzar el dado consiste en un evento, puesto que está compuesto por tres posibles sucesos: obtener un 2 o un 4 o un 6. Dentro del marco que hemos estado discutiendo, el evento estaría dado por:

$$E \subset S_1 = \{2, 4, 6\}$$

Y puesto que $P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}$ entonces $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

3.2 Las reglas del juego

3.2.1 Reglas básicas de las probabilidades

Existen algunas reglas que permiten calcular probabilidades cada vez más complicadas (y más interesantes). En este apartado discutiremos tres de esas reglas: la *regla de la negación*, la *regla multiplicativa* y la *regla aditiva*.

La **regla de la negación** resulta la más simple de todas y es, posiblemente, la más utilizada. Esta regla plantea que, si la probabilidad de que ocurra un suceso A es $\text{prob}(A) = p$, entonces la probabilidad de que no ocurra el suceso A sería $\text{prob}(\text{"no } A\text{"}) = 1 - p$.

Dentro del contexto de los eventos, esta regla afirma que la probabilidad de que no ocurra un evento (E) es equivalente a la probabilidad de que ocurra el *evento complementario* (Ec), es decir, el evento formado por todos los sucesos del espacio de posibilidades que no forman parte de E . O sea:

$$P(\text{no } E) = P(Ec)$$

Y puesto que $P(E) + P(Ec) = 1$ entonces $P(Ec) = 1 - P(E)$.

Por ejemplo, ya hemos visto que la probabilidad de obtener un 2 al lanzar un dado es de $\frac{1}{6}$. Por lo tanto, la probabilidad de no obtener un 2 sería de $\frac{5}{6}$.

La **regla de la multiplicación** plantea que para dos sucesos A y B , que sean independientes entre sí (lo cual significa que el conocimiento del resultado de uno de los sucesos no afecta al otro) la probabilidad de que ocurra el suceso A y el suceso B equivale a la multiplicación de las probabilidades de A y B por separado. O sea:

$$\text{prob}(\text{"}A \text{ y } B\text{"}) = \text{prob}(A) \times \text{prob}(B)$$

Es posible extender esta regla al contexto de los eventos, donde la ocurrencia de dos eventos $E1$ y $E2$ simultáneamente se corresponde con la ocurrencia de un evento $E3$ compuesto por aquellos sucesos del espacio de posibilidades que son comunes para $E1$ y $E2$, o sea, la intersección $E1 \cap E2$. En este caso la regla enunciaría que dados dos eventos $E1$ y $E2$ independientes entre sí, entonces $P(E1 \cap E2) = P(E1) \times P(E2)$. Debido a que la independencia de eventos resulta a veces más sutil de notar, esta regla suele usarse en la dirección inversa, o sea, si se cumple que $P(E1 \cap E2) = P(E1) \times P(E2)$, entonces los eventos $E1$ y $E2$ se definen como independientes.

A modo de ejemplo, podríamos preguntarnos: ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una baraja, a partir de un juego completo, que cumpla con ser un número (2 a 10) y al mismo tiempo sea una baraja roja (diamante o corazones)?

En este ejemplo el hecho de que los eventos son independientes resulta particularmente evidente, puesto que saber que tenemos una baraja de color

rojo no dice nada sobre la posibilidad de que sea o no un número. Por lo tanto, es posible utilizar la regla multiplicativa, donde:

$$P(R \cap N) = P(R) \times P(N)$$

Con R : evento de sacar una baraja roja; N : evento de sacar una baraja numérica.

En un mazo común y corriente, la cantidad de barajas rojas es la mitad de todas las barajas, por lo que $P(R) = \frac{1}{2}$. Por otra parte existen 13 posibilidades para el valor de una baraja, y el evento de obtener un número correspondería con 9 de ellos (todos excepto as, sota, reina o rey). Por lo tanto:

$$P(R \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{13} \approx 0.346$$

La **regla de adición** plantea que, si un suceso A determinado podría ocurrir de dos o más formas, entonces la probabilidad de obtener el suceso A es equivalente a la suma de las probabilidades de todas las formas de que ocurra dicho suceso.

Un ejemplo del uso de esta regla podría ser para dar respuesta a la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de lanzar un dado cuatro veces y obtener un 5 exactamente 2 veces? Es válido aclarar que en este ejemplo no importa en qué orden de lanzamiento del dado aparece el 5, sino que sea dos veces en 4 lanzamientos. Los cuatro lanzamientos del dado son sucesos independientes, por lo que la probabilidad de obtener un 5 en dos lanzamientos en particular, digamos segundo y tercero, sería:

$$p = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.0193$$

Donde $\frac{1}{6}$ es la probabilidad de obtener un 5, y $\frac{5}{6}$ es la probabilidad de no obtener un 5.

Es fácil notar que si hubiésemos elegido otras dos posiciones cualesquiera, la probabilidad sería la misma. Ahora bien, para determinar la probabilidad en el caso general de dos posiciones cualesquiera es posible aplicar la regla aditiva, puesto que en cualquier par de posiciones en que se obtenga el 5 tributan al mismo suceso favorable. Sería necesario, entonces, conocer cuántos posibles pares de posiciones existen, lo cual se corresponde con la combinación $\binom{4}{2} = 6$. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un 5 exactamente 2 veces resultaría de sumar 0.0193 seis veces, o sea 0.1158 aproximadamente.

Ejemplos de uso de las reglas básicas

Un jugador de póker inteligente

Actualmente, el póker es uno de los juegos de azar más populares, y el conocimiento de los conceptos básicos de las probabilidades es muy importante para ser un jugador respetable. Existe una multitud de ejemplos

del uso de las probabilidades en este juego, desde cálculos sencillos hasta otros relativamente más complicados. Discutiremos aquí un ejemplo básico.

En el póker, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una pareja luego de ser repartidas las cinco cartas?

La acotación de las palabras *al menos* significa que, como caso favorable, no solo se incluye obtener una pareja, sino también otros que implícitamente contengan una pareja (un trío, dos parejas, etc.). Si se denota por p esa probabilidad, entonces la probabilidad de obtener las cinco cartas diferentes sería, según la regla de la negación, $1 - p$, y esta sería la probabilidad que nos interesa determinar. Resulta válido notar que la probabilidad de obtener alguna carta en particular varía a medida que se van repartiendo, puesto que el número del total del mazo va disminuyendo.

Un mazo de cartas contiene 52 cartas totales, por lo que la probabilidad de que la primera de las cartas repartidas tenga algún valor específico sería de $\frac{52}{52}$, ya que las 52 cartas tienen valores. Ahora bien, para la segunda carta existirán restricciones, puesto que tiene que ser diferente de la primera. El mazo contiene ahora 51 cartas, de las cuales 3 son iguales que la primera, por lo que restan 48 cartas diferentes. Por lo tanto la probabilidad de que la segunda carta sea distinta sería de $\frac{48}{51}$. En el caso de la tercera carta, es necesario tener presente tanto el resultado de la primera como el de la segunda, por lo que ahora habría en el mazo 6 cartas que no podrían salir, de un total de 50. Por eso la probabilidad de que la tercera sea diferente de las dos anteriores sería de $\frac{44}{50}$. Siguiendo el mismo razonamiento, es posible determinar la probabilidad para la cuarta y quinta carta. Luego, aplicando la regla multiplicativa, se tiene:

$$1 - p = \frac{52}{52} \times \frac{48}{51} \times \frac{44}{50} \times \frac{40}{49} \times \frac{36}{48} \approx 0.5071$$

Por lo tanto, $p \approx 0.4929$, lo cual indica que aproximadamente un 50 % de las veces que se reparten las cartas a una persona se obtiene una pareja como mínimo. Es por ello que la forma correcta de repartir las cartas es de una en una, pasando por todos los jugadores, y no las cinco de forma consecutiva para un mismo jugador, pues, en cierto modo, el primero en recibir podría quedar favorecido.

Probabilidades aparentemente improbables

Las probabilidades resultan muy útiles en el afán de realizar predicciones, mucho más, incluso, que nuestra propia intuición, que a veces nos engaña, tal y como veremos en el siguiente ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que, en un grupo de seis personas, dos de ellos cumplan años el mismo día?

Nuestra intuición diría que ese evento es poco probable, pero veamos qué dicen las probabilidades. Denotamos como p la probabilidad deseada y, de forma similar al ejemplo anterior, procedamos a determinar $1 - p$, que, según la regla de la negación, se correspondería con la probabilidad de que todos cumplan años en fechas diferentes. Como un año tiene 365 días para la primera persona, la probabilidad de cumplir años en un día cualquiera sería de $\frac{365}{365}$, lo cual es obvio puesto que toda persona siempre tendrá un cumpleaños. Para la segunda, el año continúa teniendo 365 días, pero la cantidad de días disponibles para que esa persona cumpla años sin coincidir con la persona anterior es de 364, así que la probabilidad sería de $\frac{364}{365}$. De forma similar es posible hacer el análisis correspondiente a las otras cuatro personas. Se tiene entonces:

$$1 - p = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \times \frac{360}{365} \approx 0.96$$

Por lo tanto, $p \approx 0.04$, un valor realmente bajo. Nuestra intuición no nos engañó. No obstante, la pregunta podría ser: ¿cuál es el número de personas necesario para que esta probabilidad sea de aproximadamente el 50 %? Utilizando los argumentos expuestos arriba es posible demostrar que ese número es 23. Esto sí podría ser poco intuitivo, porque un año tiene 365 días, y 23 parece un número pequeño. Es por ello que con un grupo de más de 23 personas podría ser una apuesta inteligente afirmar que dos de ellos cumplen años el mismo día. La intuición engañaría a muchos, que aceptarían la apuesta, pero las probabilidades de ganar son equivalentes a lanzar una moneda y decir que saldrá cara.

3.2.2 Probabilidad condicional y probabilidad total

Otro concepto de extrema importancia dentro del campo de las probabilidades es el de *probabilidad condicional*. Mediante esta definición es posible relacionar dos eventos, $E1$ y $E2$, que podrían no ser independientes entre sí. Se define, entonces, la probabilidad de $E1$ dado el evento $E2$, o $P(E1|E2)$, como:

$$P(E1|E2) = \frac{P(E1 \cap E2)}{P(E2)}$$

Esta regla nos permite determinar la probabilidad de que ocurra el evento $E1$ conociendo el resultado del evento $E2$. Resulta válido notar que, si los eventos $E1$ y $E2$ son independientes entre sí, entonces $P(E1 \cap E2) =$

$P(E1) \times P(E2)$, por lo que $P(E1|E2) = P(E1)$, lo cual es lógico puesto que conocer el resultado de $E2$ no afecta la probabilidad de $E1$.

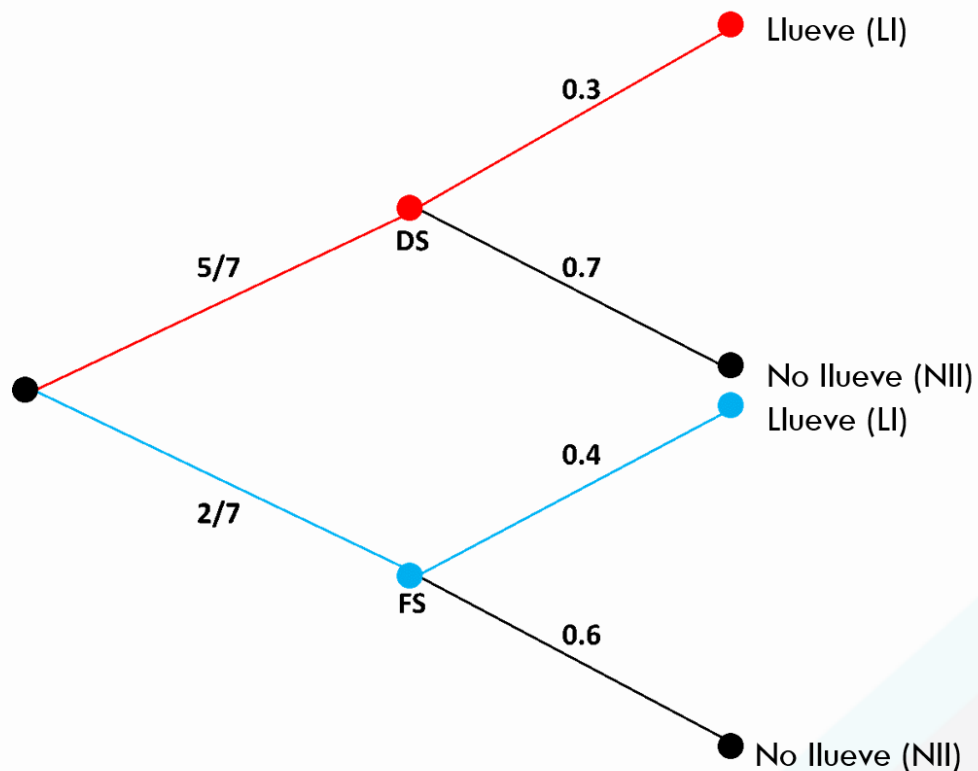
Una extensión aún más importante de este concepto consiste en la definición de la regla *probabilidad total*. Si se tiene una partición $E1, E2 \dots En$ del espacio de posibilidades, lo cual no es más que un número n de eventos que no comparten sucesos entre sí y juntos conforman todo el espacio de posibilidades; se define entonces la probabilidad total de un evento A cualquiera dentro del espacio de posibilidades como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|Ei)P(Ei)$$

Un ejemplo del uso de este concepto puede ser plantearse la siguiente problemática. Supongamos que durante un año de observaciones se determinó que la probabilidad de lluvia en los días de entre semanas (DS) es de 0.3, mientras que para los fines de semana (FS) es de 0.4. ¿Cuál es la probabilidad de lluvia en un día cualquiera?

Una forma de resolver este tipo de problema es mediante la construcción de un diagrama de árbol, que no es más que, a partir de un nodo inicial, ir adicionando y conectando nodos hasta cubrir todo el espacio de posibilidades, para luego colocar los valores de probabilidades sobre las ramas. La siguiente figura muestra un diagrama de árbol construido para el ejemplo anterior.

Figura 1: Diagrama de árbol para probabilidad de lluvia



Fuente: elaboración propia.

A partir de este diagrama es posible observar fácilmente las probabilidades condicionales siguiendo los nodos de izquierda a derecha, o sea:

$$P(LL|DS) = 0.3, P(NLL|DS) = 0.7, P(LL|FS) = 0.4, P(NLL|FS) = 0.6$$

La pregunta que plantea el problema no es más que determinar $P(LL)$. Para ello es posible utilizar la regla de la *probabilidad total*. En términos de un diagrama de árbol consiste en la suma de las probabilidades de todos los caminos posibles para llegar al nodo de interés (lluvia, en este caso) partiendo del nodo inicial y multiplicando las probabilidades que conectan los nodos de un mismo camino. En el ejemplo tenemos que (ver caminos señalados en rojo y azul en la Figura):

$$P(LL) = P(LL|DS) \times P(DS) + P(LL|FS) \times P(FS) = 0.3 \times \frac{5}{7} + 0.4 \times \frac{2}{7} \approx 0.329$$

3.2.3 La regla de Bayes

A partir de la definición de probabilidad condicional es simple inferir que, para eventos cualesquiera, $E1$ y $E2$, generalmente se cumple que $P(E1|E2) \neq P(E2|E1)$. Sin embargo podría ser útil conocer $P(E2|E1)$ dado $P(E1|E2)$. Para ello existe la conocida y ampliamente utilizada **regla de Bayes**:

Si se tiene una partición $E1, E2, \dots, En$ del espacio de posibilidades de forma similar a la expuesta anteriormente, y un evento A cualquiera dentro del espacio de posibilidades, la regla de Bayes plantea que para cualquier evento Ei de la partición se cumple que:

$$P(Ei|A) = \frac{P(A|Ei) \times P(Ei)}{\sum_{j=1}^n P(A|Ej)P(Ej)}$$

Es posible utilizar la regla de la probabilidad total para reescribir el denominador y llevar esta regla a una forma más sencilla para su uso:

$$P(Ei|A) = \frac{P(A|Ei) \times P(Ei)}{P(A)}$$

Retomando el ejemplo anterior, sería posible plantear el problema inverso. Supongamos que un día determinado llueve. ¿Cuál sería la probabilidad de que ese día sea fin de semana? La solución a esta pregunta sería determinar $P(FS|Ll)$, por lo que es posible utilizar la regla de Bayes:

$$P(FS|Ll) = \frac{P(Ll|FS) \times P(FS)}{P(Ll|DS) \times P(DS) + P(Ll|FS) \times P(FS)}$$

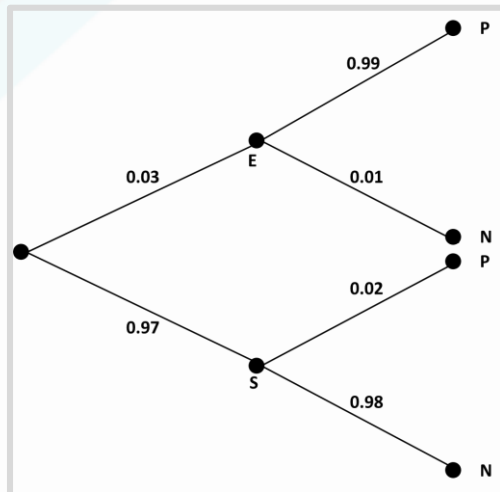
$$P(FS|Ll) = \frac{P(Ll|FS) \times P(FS)}{P(Ll)}$$

$$P(FS|Ll) = \frac{0.4 \times \frac{2}{7}}{0.329} \approx 0.35$$

Un ejemplo muy útil del uso de esta regla consiste en determinar la confiabilidad del resultado de un test médico para una enfermedad determinada. Un test de este tipo tendría dos resultados posibles: positivo (P) o negativo (N), pero a su vez la eficiencia del test dependerá de si la persona se encuentra realmente afectada o no por la enfermedad (E). Supongamos que se tiene un test muy bueno, pues es 99 % efectivo en dar positivo cuando la persona está enferma, y 98 % efectivo en dar negativo cuando la persona está sana (S). Supongamos también que el 3 % de la población humana es enferma. La pregunta es, entonces, ¿cuál es la probabilidad de que una persona cualquiera reciba un resultado positivo del test y esté realmente enferma?

Para resolver esta cuestión es posible construir un diagrama de árbol, donde la primera ramificación estaría relacionada con la probabilidad de que una persona al azar esté enferma (3 %), y la segunda ramificación estará relacionada con el resultado del test. La siguiente figura muestra dicho diagrama.

Figura 2: Diagrama de árbol para resultado de test de enfermedad



Fuente: elaboración propia.

Entonces, la pregunta consistiría en determinar la probabilidad de estar enfermo dado un resultado positivo, o sea $P(E|P)$, y según la regla de Bayes:

$$P(E|P) = \frac{P(P|E) \times P(E)}{P(P)}$$

Donde $P(P|E) = 0.99$; según la eficiencia del test, $P(E) = 0.03$, y según la regla de la probabilidad total:

$$P(P) = P(P|E) \times P(E) + P(P|S) \times P(S) = 0.99 \times 0.03 + 0.02 \times 0.97 \approx 0.049$$

Por lo tanto,

$$P(E|P) = \frac{0.99 \times 0.03}{0.049} \approx 0.605$$

En otras palabras, en una situación como esta, con un test tan eficiente como el utilizado en el ejemplo, la probabilidad real de estar enfermo al recibir un resultado positivo es solo del 60 %. Este es un resultado notable a tener en cuenta, y es por ello que en determinadas situaciones es recomendable repetir estos test en más de una ocasión, sobre todo cuando se trate de alguna enfermedad que presente un bajo porcentaje de incidencia. Este simple uso de la regla de Bayes refleja su altísimo papel para comprender situaciones de la vida cotidiana.

Referencias

Bertsekas, D. P., & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to Probability* (2ª ed). USA: Wiley.

Chung, K. L. (2001). *A Course in Probability Theory* (3ª ed). USA: Academic Press.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (3ª ed.). USA: Wiley.

Rumsey, D. J. (2006). *Probability For Dummies*. USA: Wiley.

Vega-Amaya, O. (2002). *Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad*. México: Universidad de Sonora.